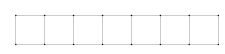
Felnőtt - kiemelt — Debrecen 2015

1. Egy szabályos kilencszögben mekkora az a legkisebb szög, melyet az átlók bezárnak?
2. Egy 16 csúcsú, létra alakú gráf csúcsait le szeretnénk fedni olyan élek segítségével, melyeknek közül semmelyik kettőnek nincs közös vége. Ez hányféleképpen tehető meg?



3. Egy 2014 csúcsú teljes gráfnak kiszínezzük minden élét. Ehhez legkevesebb hány szín szükséges úgy, hogy azonos színű élek ne találkozzanak egy csúcsban?
4. Az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ számok halmazának egy H részhalmaza olyan tulajdonságú, hogy H egyik elemének a háromszorosa sincs benne H-ban. Legfeljebb hány eleme lehet H-nak?
5. Egy $1 \times 2 \times 3$ cm oldalhosszúságú téglatest valamelyik 4 párhuzamos élén 1-1 pont mozgatható. Legfeljebb mekkora lehet a 4 pont által meghatározott tetraéder és a téglatest térfogatának aránya?
6. Adott egy 2014 csúcsú gráf, melynek csúcsait 1-től 2014-ig számozzuk. Ezek közül éllel összekötünk minden olyan csúcspárt, melyek sorszámai közül egyik osztja a másikat. Legalább hány szín szükséges a csúcsok kiszínezéséhez, ha az éllel összekötött pár nem lehet azonos színű?
7. A 32 lapos magyarkártya-pakliból kiválasztottuk a számot tartalmazó lapokat (VII, VIII, IX, X). Hányféle sorrendben lehet ezt a 16 lapot az asztalra letenni, ha egymás mellé csak ”ciklikusan szomszédos” lapok kerülhetnek? (A ténylegesen szomszédos számokat tartalmazó lapokon kívül a VII és a X ciklikusan szomszédosak).
8. Egy országban a fővárosból 100, az összes többi városból 10-10 vasútvonal indul (az egy városból induló vonalak célállomásai mind különbözőek, és a vonalakon mindkét irányban lehet közlekedni). Azt is tudjuk továbbá, hogy bármely városból bármely másik elérhető. Legalább hány fővárosból induló vasútvonalat lehet biztosan megszüntetni, hogy továbbra is bármely városból bármely másikba el lehessen jutni?
9. Egy A halmaz elemei különbözo pozitív egész számok. A-nak 7-nél több eleme van, az elemek szorzata nem osztható 160-nal és nem negyedik hatványa egyetlen pozitív egész számnak sem. Az összes elemének a legkisebb közös többszöröse 390, és bármely két elem legnagyobb közös osztója nagyobb, mint 1. Melyek az A halmaz elemei?
10. Egy 2cm átmérőjű körön válasszunk véletlenszerűen 6 darab pontot a következő sorrendben: A, B, C, D, E, F. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ABC háromszög és a DEF háromszög diszjunkt?
11. Egy mértani sorozat első három elemének összege 28, a következő három elem összege 3,5. Mi a sorozat 8. eleme?
12. A $MATEK$ szó minden betujének megfeleltettünk egy számjegyet. A következo összefüggéseket találtuk:
    $M + A + T + E + K = 21$
    $M + A + T = 12$
    $A \cdot T = 21$

$T + E = 8$
$K/M = 2$
Mennyi a számjegyek szorzata?

13. A Nagy Medve estélyen minden hím medve kezet fogott minden medvével a párját kivéve, azonban a nostények egymással nem fogtak kezet. Ha 42 medve pár vett részt az estélyen, akkor hány kézfogás volt a 84 medve között?

14. Az $ABCDE$ konvex ötszögben A-nál és B-nél $120°$-os szög van. $EA = AB = BC = 2$ és $CD = DE = 4$. Mekkora az ötszög területe?

15. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyeket írjuk fel egy-egy cédulára és tegyük ezeket egy dobozba. Húzzunk ki visszatevéssel egymás után 5 cédulát, és adjuk össze a rajtuk lévo számjegyeket. Hány esetben lesz a kihúzott öt számjegy összege legalább 23?

16. A papamedve egy csupor mézet fel óra, a mamamedve egy óra, a négy medvebocs pedig két-két óra alatt nyalogatja el. Ha ez a medvecsalád vacsorára beszerzett egy csupor mézet, és mindannyian egyszerre ülnek neki a vacsorának, akkor mennyi idő alatt fogy el a méz?

17. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalfelező pontjait összekötve egy kisebb hatszöget kapunk. Az ABCDEF hatszög területének hányadrésze esik a kis hatszögbe?

18. Az $ABCD$ tetraéder élei nagyság szerint 7, 13, 18, 27, 36 és 41. Ha $AB = 41$, akkor mekkora CD?

19. Csodaország parlamentjében 10 bizottság működik. Minden honatya 2 bizottságban dolgozik, és bármely két bizottságnak egy közös tagja van. Hány tagú Csodaország parlamentje?

20. Mennyi a $\frac{x^2-6x+10}{x-3}$ kifejezés minimuma, ha $x > 3$?

21. Csapadisztánban 3-féle időjárás szokott lenni: havas, esős, ködös. Ha egyik nap havas idő van, utána 1/2 valószínűséggel havas, 1/3 valószínűséggel ködös, 1/6 valószínűséggel esős nap jön. Ha esős az idő, másnap 2/5 valószínűséggel esik, 2/5 valószínűséggel ködös, 1/5 valószínűséggel havas nap jön, míg ködös idő esetén másnap 1/2-1/2 valószínűséggel lesz ködös vagy esős idő. Havazásban nem rendeznek futball meccseket. Ha csütörtökön eső esett, mekkora valószínűséggel tarthatják meg szombaton a kupadöntőt?

22. Egy 7×7-es „sakktábla” két mezőjét sárgára festették a többit zöldre. Két színezést nem tekintünk különbözőnek, ha az egyiket megkapjuk a másik síkbeli elforgatásával. Hány darab különböző színezés lehetséges?

23. A síkon felvett 13 darab egyenes között nincsenek párhuzamosak és nincs olyan metszéspontjuk sem, amelyen három vagy annál több egyenes megy át. Metszéspontjaik legfeljebb hány egyenest határoznak meg?

24. Adott a térben 4 nem egysíkú pont. Hányféleképpen lehet e pontoktól egyenlo távolságra síkokat elhelyezni?

25. Egy n résztvevős körmérkőzéses pingpong-tornán mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Tudjuk, hogy közöttük biztosan van négy olyan játékos, A, B, C és D, hogy A megverte B-t, C-t és D-t is, B megverte C-t és D-t, míg C megverte D-t. Legalább mekkora az n értéke?

26. Egy délelőtt 6 ember járt a könyvtárban. Mindenki egyszer ment be és jött ki, és a 12 esemény mind különböző időpontban történt. Hányféle lehet a 12 esemény sorrendje?

27. Hány n pozitív egész számra lesz $1! + 2! + 3! + ... + n!$ egy egész szám négyzete! ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$, azaz 1-től n-ig az egész számok szorzata, ha n>1, egész és 1!=1.)

28. Maximum hány részhalmaza választható ki az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak úgy, hogy bármelyik kettőnek legyen közös eleme?

29. Egy n szám tökéletes, ha osztóinak összege $2n$. Mennyi a 10. tökéletes szám osztóinak reciprokösszege?

30. Egy n számjegyű pozitív egész számot cselesnek nevezünk, ha jegyeinek sorozata az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja, és az első k számjegyből alkotott szám osztható k-val, ha $k = 1, 2, \ldots, n$. Például 321 egy cseles szám, mert 1 osztja 3-at, 2 osztja 32-t és 3 osztja 321-et. Mennyi a hatjegyű cseles számok összege?

31. Egy 12×12-es tábla bal szélső oszlopának és alsó sorának mind a 23 mezőjén kezdetben egy bábu áll. Egy lépésben egy bábu egy szomszédos mezőre léphet, ha ott nincs bábu, és korábban sem volt még ott bábu. A bábukkal addig lépegetünk, míg a felső sor és a jobb szélső oszlop 23 mezőjére a lehető legtöbb bábu kerül. Hány bábu áll ezután a felső sorban és a jobb szélső oszlopban összesen? (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.)

32. Adott a síkban 30 darab körvonal, amelyek közül bármelyik ketto éppen két pontban metszi egymást, és egyik ponton sem halad át az adott körvonalakból kettonél több. Összesen hány részre osztja fel a síkot a körvonalaknak ez a rendszere?

33. Egy az egész számok halmazán értelmezett egész értékű f függvényt az alábbi képlettel adtunk meg. Tegyük fel, hogy k páratlan és $f(f(f(k))) = 27$. Mennyi a k számjegyeinek összege?

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ n/2 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$